• Σταν περίπτωση που το x_0 είναι ανώμαλο σημείο (για την $\alpha_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$):

~ Κανονικό σημείο τώρα για να είναι, θα πρέπει να

$$\left.\begin{array}{l} \exists A_1 = \dfrac{a_1}{a_2}\cdot(x-x_0) : D_1 \to \mathbb{R},\ x_0 \in D_1 \\ \exists A_2 = \dfrac{a_0}{a_2}\cdot(x-x_0)^2 : D_2 \to \mathbb{R},\ x_0 \in D_2 \end{array}\right\} \text{(αναλυτικές στο } x_0\text{)}$$

~ Μη κανονικό (ανώμαλο σημείο): είναι το όχι κανονικό.

Παράδειγμα (ii) (2.33)

$$(x-2)y'' + (\sin 2x)y' + (x^2+1)y = 0$$

ΛΥΣΗ

Για $x \neq 2$ είναι ομαλά

Για $x = 2$ είναι ανώμαλο σημείο ($\alpha_2(x) = x-2$, $a_2(2) = 0$)

Είναι $\alpha_2(x) = x-2$

$\alpha_1(x) = \sin 2x$

$\alpha_0(x) = x^2+1$

$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\cdot(x-2) = \frac{\sin 2x}{\cancel{x-2}}\cancel{(x-2)} = A_1(x)$ Αναλυτική στο 2 ομαλό σημείο

ή

$\frac{\alpha_0}{\alpha_2}\cdot(x-2)^2 = \frac{x^2+1}{\cancel{x-2}}(x-2)^{\cancel{2}} = (x^2+1)(x-2)$ Αναλυτική στο 2 ομαλό σημείο

Παράδειγμα (iii) (2.33)

$$y'' + |x|\cdot y' + (x+1)^{1/3}y = 0$$

ΛΥΣΗ

$\alpha_2(x) = 1$

$\alpha_1(x) = |x|$ → Το 0 ανώμαλο σημείο (Αφού δεν παραγωγ. εκεί)

$\alpha_0(x) = (x+1)^{1/3}$ → Το -1 ανώμαλο σημείο (Αφού δεν παραγωγ. εκεί).

$\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}x = x\cdot|x|$ όχι αναλυτική στο 0 ~> το 0 είναι μη Κανονικό ~~ανώμαλο~~ σημείο

$\frac{\alpha_0(x)}{\alpha_2(x)}\cdot(x+1)^2 = \frac{(x+1)^{1/3}}{1}(x+1)^2 = (x+1)^{7/3}$ όχι αναλυτική στο -1 ~> το -1 είναι μη κανονικό ~~ανώμαλο~~ σημείο.

Παράδειγμα (iv) (2.33).

$$(x^4-x^2)y'' + (2x+1)y' + x^2(x+1)y = 0$$

ΛΥΣΗ

$\alpha_2(x) = x^2(x^2-1)$, $\alpha_1(x) = 2x+1$ και $\alpha_2(x) = x^2(x+1)$

↓ ↓ ↓

$x \neq 0, \pm 1$ ομαλά σημεία, $x \neq -\frac{1}{2}$ ομαλό σημείο $x \neq -1, 0$ ομαλό σημείο

• $x=0 \to \frac{a_1}{a_2} \cdot x = \frac{2x+1}{x^2(x-1)(x+1)} = \frac{2x+1}{x(x-1)(x+1)}$ ανώμαλο σημείο

• $x=1 \to \frac{a_1}{a_2}(x-1) = \frac{2x+1}{x^2\cancel{(x-1)}(x+1)}\cancel{(x-1)} = \frac{2x+1}{x^2(x+1)}$ αναλυτική στο 1 ομαλό σημείο

• $x=-1 \to \frac{a_0}{a_2}(x+1) = \ldots$ όμοια. Κανονικό σημείο

ΘΕΩΡΗΜΑ 2: Έστω x_0: κανονικό ανώμαλο σημείο της (E): $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$

$$A_1(x) = \frac{a_1}{a_2}(x)\cdot(x-x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x-x_0)^n, \quad 0<|x-x_0|<R_1$$

και

$$A_2(x) = \frac{a_0}{a_2}(x)\cdot(x-x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x-x_0)^n, \quad 0<|x-x_0|<R_2$$

Ενδεικτική εξίσωση: $\lambda^2 + (p_0-1)\lambda + q_0 = 0 \Rightarrow \lambda_1$ και λ_2 ρίζες της εξίσωσης αυτής (και $Re\lambda_2 \leq Re\lambda_1$ εάν μιγαδικές ρίζες).

Μια λύση y_1 της (E): $y_1(x) = |x-x_0|^{\lambda_1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$, $0<|x-x_0|<R$

με $c_0=1$ και $R=\min\{R_1,R_2\}$

Μια δεύτερη λύση y_2 γραμ. ανεξ. με την y_1:

(i) $\lambda_1-\lambda_2 \notin \mathbb{Z}$ τότε $y_2(x) = |x-x_0|^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty} d_n (x-x_0)^n$, $0<|x-x_0|<R$

με $d_0=1$ και $R=\min\{R_1,R_2\}$

(ii) $\lambda_1=\lambda_2$ τότε $y_2(x) = y_1(x)\log|x-x_0| + |x-x_0|^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty} d_n (x-x_0)^n$

όπου $d_0=0$ και $0<|x-x_0|<R$

(iii) $\lambda_1-\lambda_2 \in \mathbb{N}^*$: $y_2(x) = C\cdot y_1(x)\cdot\log|x-x_0| + |x-x_0|^{\lambda_2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} d_n (x-x_0)^n$

όπου $d_0=1$ και $0<|x-x_0|<R$.

Π.χ 1) Έστω $2x^2 y'' + (x-x^2)y' - y = 0$ $\quad x_0=0$

και ζητάμε δυναμοσειρά λύσης γύρω από το x_0

ΛΥΣΗ

$a_2(x) = 2x^2$, $a_1(x) = x-x^2$, $a_0(x) = -1$

Έχουμε, $a_2(x_0) = 2\cdot 0^2 = 0 \sim x_0=0$ Ανώμαλο σημείο

$$A_1(x) = \frac{x-x^2}{2x^2}\cdot x = \frac{(1-x)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x-x_0)^n$$

με $p_0 = \frac{1}{2}$, $p_1 = -\frac{1}{2}$ και $R_1 = +\infty$

$$A_0(x) = -\frac{1}{2x^2}\cdot x^2 = -\frac{1}{2} \rightsquigarrow q_0 = -\frac{1}{2}$$

Ενδεικτική εξίσωση $\lambda^2 + (\frac{1}{2}-1)\lambda - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Άρα, $y_1(x) = |x|^1 \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n$, $c_0 = 1$ και $R = +\infty$

όπου για $x > 0$

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} \Rightarrow y_1'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+1) x^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (n+1) n x^{n-1}$$

Έχουμε, δηλαδή:

Υπάρχει τυπογραφικό

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2c_n (n+1) n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+1) \cdot x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-c_n)(n+1) x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2c_{n+1} (n+2)(n+1) x^{n+2} + \sum_{i=-1}^{\infty} c_{i+1} (i+2) x^{i+2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+1) x^{n+2} - \sum_{n=-2}^{\infty} c_{n+2} x^{n+2} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2c_{n+1} (n+2)(n+1) x^{n+2} + c_0 \cdot 1 \cdot x^1 + \sum_{i=0}^{\infty} c_{i+1} (i+2) x^{i+2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+1) x^{n+2} -$$

$$- c_0 \cdot 1 - c_1 \cdot x^1 - \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} x^{n+2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (c_0 - c_1)x - c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(2c_{n+1}(n+2)(n+1) x^{n+2} + c_{n+1}(n+2) x^{n+2} - c_n (n+1) x^{n+2} - c_{n+2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow (c_0 - c_1)x - c_0 = 0 \text{ και } \left(2c_{n+1}(n+2)(n+1) + c_{n+1}(n+2) - c_n(n+1) - c_{n+2} \right) = 0$$

Αν λυθεί σωστά το παραπάνω τοτε παιρνουμε οτι:

Θα προκύψει μετά ότι:

$$(2n+3)c_n - c_{n-1} = 0 \overset{n \geq 1}{\Rightarrow} c_n = \frac{c_{n-1}}{2n+3}, \ n \geq 1$$ <-- (Σωστός τύπος)

- $n = 1 \rightsquigarrow c_1 = \frac{c_0}{2 \cdot 1 + 3} = \frac{c_0}{5}$
- $n = 2 \rightarrow c_2 = \frac{c_1}{7}$
- $\vdots$
- $n = n \longrightarrow c_n = \frac{c_{n-1}}{2 \cdot n + 3}$

πολλαπλασιάζουμε: $c_n = \frac{1}{5 \cdot 7 \cdots (2n+3)} \cdot c_0, \ n \geq 1$

$$\left(= \frac{3 \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n+2))}{(2n+3)!} = \right.$$

$$= \frac{3\cdot(2\cdot1)(2\cdot2)\cdots(2(n+1))}{(2n+3)!} = \frac{3\cdot 2^{n+1}(1\cdot2\cdots(n+1))}{(2n+3)!} =$$

$$\left. = \frac{3\cdot 2^{n+1}(n+1)!}{(2n+3)!}\right)$$

Για την $y_2(x)$ τώρα είναι:

$$y_2(x) = x^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{n-\frac{1}{2}}, \quad d_0 = 0$$

$$y_2'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n\left(n-\tfrac{1}{2}\right)x^{n-\frac{3}{2}}$$

$$y_2''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n\left(n-\tfrac{1}{2}\right)\left(n-\tfrac{3}{2}\right)x^{n-\frac{5}{2}}$$

Άρα, στην αρχική σχέση είναι:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2d_n\left(n-\tfrac{1}{2}\right)\left(n-\tfrac{3}{2}\right)x^{n-\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} d_n\left(n-\tfrac{1}{2}\right)x^{n-\frac{1}{2}} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} d_n\left(n-\tfrac{1}{2}\right)x^{n+\frac{1}{2}}}_{=\sum_{n=1}^{\infty} d_{n-1}\left(n-\frac{3}{2}\right)x^{n-\frac{1}{2}}} - \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{n-\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2d_0\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{3}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}} + d_0\left(-\tfrac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}} - d_0 x^{-\frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(2d_n\left(n-\tfrac{1}{2}\right)\left(n-\tfrac{3}{2}\right) + d_n\left(n-\tfrac{1}{2}\right) - d_{n-1}\left(n-\tfrac{3}{2}\right) - d_n\right)x^{n-\frac{1}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow 2d_0\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{3}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}} + d_0\left(-\tfrac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}} - d_0 x^{-\frac{1}{2}} = 0$$

και

$$\left(2d_n\left(n-\tfrac{1}{2}\right)\left(n-\tfrac{3}{2}\right) + d_n\left(n-\tfrac{1}{2}\right) - d_{n-1}\left(n-\tfrac{3}{2}\right) - d_n\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2nd_n - d_{n-1} = 0, \quad n \geq 0 \Rightarrow d_n = \frac{d_{n-1}}{2n}, \quad n \geq 1$$

- $n=1 \to d_1 = \frac{1}{2}$
- $n=2 \to d_2 = \frac{d_1}{2\cdot2} = \frac{1}{8}$
- $\vdots$
- $n=n \to d_n = \frac{d_{n-1}}{2n}$

Πολλαπλασιάζω κατά μέλη:

$$d_n = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n\left(1\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}\cdots\tfrac{1}{n}\right) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n\frac{1}{n!}$$

και άρα $Y_2(x) = |x|^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}x^n = |x|\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x/2)^n}{n!}$

άρα $Y_2(x) = |x|^{-1/2}\cdot e^{x/2}$